Chap II : **Mesure**

Déf : soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et μ une application tq

$$\mu : \mathcal{E} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$
$$A \longmapsto \mu(A)$$

μ est dite additive si ① $\mu(\phi) = 0$

② si $\forall A, B \in \mathcal{E}$, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

Déf : soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et μ une application additive alors μ est dite σ additive ou bien mesure si elle vérifie : $\forall (A_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{E}$ tq $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \phi$ on a $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$

(additive : disjoints)

Exemple 1 :

Mesure de Dirac ; $\delta_a : \mathcal{E} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$

$A \longmapsto \delta_a(A) = \begin{cases} 1 & ; a \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

. En effet : . $\delta_a(\phi) = 0$

. soit $(A_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{E}$ tq $A_i \cap A_j = \phi$; $i \neq j$

$\delta_a\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \overset{??}{=} \sum_{n \geq 1} \delta_a(A_n)$??

* si $a \in \bigcup_{n \geq 1} A_n \Rightarrow \exists n_0 \geq 1$ tq $a \in A_{n_0}$

$\Rightarrow a \in A_{n_0}$ et $a \notin A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{n_0\}$

$\Rightarrow \delta_a(A_{n_0}) = 1$, $\delta_a(A_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{$

donc $\delta_a\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = 1$ (par déf) et d'autre part $\sum_{n \geq 1} \delta_a = 1 + 0 + \cdots + 0 = 1$

d'où $\delta_a\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \delta_a(A_n)$

Exemple:

Soit l'application $\text{card}: (E, \mathcal{E}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ alors card est une mesure sur $\mathcal{E}$

$$A \longmapsto \begin{cases} \text{card}(A) & \text{si } A \text{ est fini} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

preuve: • $\text{card}(\emptyset) = 0$

• soit $(A_n)_n \in \mathcal{E}$ tq $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$

$$\left(\text{on a: } \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = \text{card}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \right)$$

* s'il $\exists n_0 \geq 0$ tq A_{n_0} n'est pas finie alors $\bigcup_{n \geq 0} A_n$ n'est pas finie

$\Rightarrow \text{card}\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = +\infty$

* sinon

• si $\forall n \geq 0$; A_n sont finies, alors on a $\text{card}\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = \sum_{n \geq 0} \text{card}(A_n)$

d'où card est une mesure.

Déf: Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et μ une mesure sur $\mathcal{E}$ alors le triplet $(E, \mathcal{E}, \mu)$ est appelé espace mesuré.

• Si $\mu(E) < +\infty$, on dit que la mesure μ est bornée.

• s'il $\exists (A_n)_{n \geq 0}$ tq $\bigcup_n A_n = E$ et $\mu(E) = 1$ Alors μ est dite mesure de probabilité

et l'espace $(E, \mathcal{E}, \mu)$ est appelé espace de Probabilité.

• si $A \in \mathcal{E}$ tq $\mu(A) < +\infty$, on dit que A est μ-mesurable ou bien A est mesurable

• s'il $\exists (A_n)_{n \geq 0}$ tq $\bigcup_n A_n = E$ et $\mu(A_n) < +\infty$ alors μ est appelé mesure finie

EXP:

Mesure de Lebesgue

on définit la mesure de Lebesgue $\mu: \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$

$$]a,b[\longmapsto \mu(]a,b[) = b - a$$

mesurant la distance sur $\mathbb{R}$

plus généralement, la mesure de lebesgue mesure l'espace sur $\mathbb{R}^2$, le volume sur $\mathbb{R}^3$.

C'est le plus important des mesure en probabilité et en intégration tq sur $\mathbb{R}^n$ on a

$$\mu(]a,b[) = \mu\left(\prod_{n=1}^{n}]a_n, b_n[\right) = \prod_{n=1}^{n} (b_n - a_n)$$

$* \mu([a,b]) = \mu(\{a\} \cup \{b\} \cup]a,b[) = \mu(\{a\}) + \mu(\{b\}) + \mu(]a,b[)$

$= b-a$; $\mu(\{a\}) = 0$; $\mu(\{b\}) = 0$; $\mu(]a,b[) = b-a$ (remarque pour Lebesgue $\mu(\{\}) = 0$)

$\Rightarrow \mu([a,b]) = \mu(]a,b[) = \mu(]a,b])$

on déduit que $\mu(\mathbb{N}) = \mu(\phi) = 0$; on dit que $\mathbb{N}$ et ϕ sont négligeable par rapport à μ

Déf:

soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et soit $A \in \mathcal{E}$. on dit que A est μ-négligeable ou bien négligeable % à la mesure si $\mu(A) = 0$

Proposition:

. Si $E = \mathbb{R}$; on a $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est négligeable $\Leftrightarrow \exists I_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$; $k \in \mathbb{N}$ tq $A \subset I_k$; $k \in \mathbb{N}$ et $\exists \varepsilon > 0$; $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(I_k) < \varepsilon$

Exemple:

Tout singleton est négligeable % à la mesure de Lebesgue, en effet $\mu(\{x\}) = x - x = 0$ $\forall A \in \mathbb{R}$

Définition:

soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et R une relation, on dit que R est vrai presque partout si le sous ensemble $N = \{x \in E / R(x) \text{ n'est pas vraie}\}$ est négligeable

c-à-d, $\mu(N) = 0$

Exemple:

1) soit f et g deux fcts données de E dans $\mathbb{R}$, on dit que $f = g$ presque partout si le sous ensemble de E, $N = \{x \in E / f(x) \neq g(x)\}$ est négligeable

on écrit $f = g$ P.P

2) on dit que la suite f_n cvge p.p vers f si $A = \{x \in E / f_n(x) \not\to f\}$ est négligeable on écrit $f_n \xrightarrow{\text{cvge}} f$ P.P

Exercice :

Chercher la convergence des suites de fcts suivantes :

1) $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^n)^{1+\frac{1}{n}}}$; $x \in [0,1]$; $n \in \mathbb{N}^*$

2) $g_n(x) = \frac{|\sin(x)|^{\frac{e}{n}}}{1+x^e}$; $x \in [0,+\infty[$; $n \in \mathbb{N}^*$

3) $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}$; $x > 0$

Reponse :

1) on a $\forall x \in [0,1[$, $f_n(x) \longrightarrow 1$ mais pour $x = 1$, on $f_n(x) \longrightarrow \frac{1}{e} \neq 1$

et on a $N = \{x \in E / f_n(x) \not\longrightarrow 1\} = \{1\}$ et $\mu(\{1\}) = \mu(N) = 1 - 1 = 0$

2) on a $g_n(x) = \frac{|\sin(x)|^{\frac{e}{n}}}{1+x^e}$; $x \in [0,+\infty[$

on a $\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{|\sin(x)|^{\frac{e}{n}}}{1+x^e} = \frac{1}{1+x^e}$; $\forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$

or $A_k = \{x = k\pi ; k \in \mathbb{Z}_+\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{k\pi\}$

et $\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}_+} \{k\pi\}\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \mu(k\pi) = 0$ D'où A_k est negligeable.

Donc $g_n(x) \longrightarrow \frac{1}{1+x^e}$ p.p

3) $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}} \xrightarrow{C.S} 0$

Exercice :

Montrer que si A est une partie denombrable alors A est négligeable $\forall$ à la mesure de Lebesgue.

- Idée $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$
- utilisée Prop : A est négligeable $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists I_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tq $A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(I_k) < \varepsilon$

Reponse :

on a A est denombrable alors $A = \{a_k, k \in \mathbb{N}\}$

Soit $\varepsilon > 0$ tq $a_k \in]a_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, a_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}[= I_k$;

on a $\mu(I_k) = \frac{\varepsilon}{2^k} \Rightarrow \sum_{k\geq 0} \mu(I_k) = \varepsilon \sum \frac{1}{2^k} = \varepsilon$

$\mu(I_k) = \left(a_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right) - \left(a_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right)$

donc $A \subset \bigcup I_k$ tq $\sum_{k\geq 0} \mu(I_k) = \varepsilon$ et par suite A est négligeable

Mesure Produit

soit $(E_1, \mathcal{E}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{E}_2, \mu_2)$ deux espaces mesuré. on définit la mesure produit appelée aussi mesure produit tensoriel $\mu_1 \otimes \mu_2$

Dans le théorème suivant :

Théorème : soit μ_1 et μ_2 deux mesures σ-finies. alors il existe une mesure appelé mesure tensoriel notée par $\mu_1 \otimes \mu_2$ et définit comme suit :

$$\mu_1 \otimes \mu_2 (A,B) = \mu_2(A) \cdot \mu_2(B), \quad \forall A,B \in \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$$

Théorème de Tonelli :

soit f une fonction $\mathcal{E}$-mesurable positive ; $f : E_1 \times E_2 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ alors on a

$$\iint_{E_1 \times E_2} f(x,y)\, d\mu_1 \otimes \mu_2 (x,y) = \int_{E_1} \left[\int_{E_2} f(x,y)\, d\mu_2(y) \right] d\mu_1(x)$$

$$= \int_{E_2} \int_{E_1} f(x,y)\, d\mu_1(x)\; d\mu_2(y)$$

Théorème de Fubini :

soit f une fonction μ-intégrable ; $f : E_1 \times E_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y)$

alors on a : $\iint_{E = E_1 \times E_2} f(x,y)\, d\mu_1 \otimes \mu_2 (x,y) = \int_{E_1} \left[\int_{E_2} f(x,y)\, d\mu_2(y) \right] d\mu_1(x)$

$$= \int_{E_2} \left[\int_{E_1} f(x,y)\, d\mu_1(x) \right] d\mu_2(y)$$

Exercice :

soit $D = [0,1] \times [a,b]$; $0 < a < b$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto x^y$

1) Calculer $I = \int_D f(x,y)\, dx\, dy$

2) En déduire $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln(x)} dx$?

Correction :

$D = [0,1] \times [a,b]$ tq $0 < a < b$; $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto x^y$

1°) f est intégrable ??

$\forall (x,y) \in [0,1] \times [a,b]$; $(x,y) \longmapsto x^y$ est continue, donc f est intégrable sur D.

D'après le théorème de Fubini : $I = \int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{[a,b]} \left[\int_0^1 f(x,y)\,dx \right] dy$

$$I = \int_{[a,b]} \left[\int_0^1 x^y\,dx \right] dy = \int_{[a,b]} \left[\frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_0^1 dy = \int_a^b \frac{1}{y+1}\,dy = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$$

2°) D'après 1°) et théorème de Fubini : (Log = ln)

$$\int_a^b \left(\int_0^1 x^y\,dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_a^b e^{y \ln x}\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$$

Théorème de Convergence Dominée (TCD)

- Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions mesurable tq $f_n \xrightarrow{CV} f$ p.p et $f : E \to F$ telque il $\exists$ une f° g intégrable, positive vérifiant : $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in E$ alors on a $\lim_{n \to +\infty} \int f_n(x)\,d\mu(x) = \int \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\,d\mu(x)$

Exercice :

1) Calculer $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{|\sin(x)|^{\frac{\alpha}{n}}}{1+x^\alpha}\,dx$

2) Calculer $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^n)^{1+\frac{1}{n}}}$

Correction :

1) soit $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f_n(x) = \frac{|\sin(x)|^{\frac{\alpha}{n}}}{1+x^2}$$

(i) • $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{|\sin(x)|^{\frac{\alpha}{n}}}{1+x^2}$

on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{1}{1+x^2}$ p.p (presque partout.)

si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ et $\{x = 0\}$ est négligeable.

($\mu(\{x\}) = x - x = 0$; μ : mesure de Lebesgue)

et comme $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ intégrable sur $[0,1]$ car $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue et positive sur $[0,1]$

(ii) $\forall x \in [0,1]$: $|f_n(x)| = \left|\frac{|\sin(x)|^{\frac{\alpha}{n}}}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $[0,1]$

T.C.D : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$

2) soit $f_n(x) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{(1+x^n)^{1+\frac{1}{n}}}$$

(i) $\forall x \in [0,1[$ p.p ; $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$ p.p

• pour $x = 1$; $f_n(1) = \frac{1}{2} \neq 1$ et $\{x = 1\}$ est négligeable % à la mesure de Lebesgue.

(ii) $\forall x \in [0,1[$; $|f_n(x)| = \left|\frac{1}{(1+x^n)^{1+\frac{1}{n}}}\right| \leqslant 1$

or $g(x) = 1$ est intégrable sur $[0,1[$

T.C.D : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^n)^{1+\frac{1}{n}}} = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+x^n)^{1+\frac{1}{n}}}\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1$

Théorème :

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesurée et (f_n) une suite de fct ① mesurable, ② positives sur E alors on a : $\sum_{n\geq 0} \int_E f_n(x)\, d\mu(x) = \int_E \sum_{n\geq 0} f_n(x)\, d\mu(x)$

Théorème :

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesurée et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fct μ-intégrable telque $\sum_{n\geq 0} \int_E |f_n(x)|\, d\mu < +\infty$ alors on a

$$\sum_{n\geq 0} \int_E f_n(x)\, d\mu(x) = \int_E \sum_{n\geq 0} f_n(x)\, d\mu(x)$$

Continuité sous signe intégrale

Théorème :

Soit $f : E_1 \times E_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y)$ et soit $(E_1, \mathcal{E}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{E}_2, \mu_2)$ deux espace mesuré et soit $F(x) = \int_{E_2} f(x,y)\, d\mu_2(y)$

si on a : ① $y \longmapsto f(x,y)$ est mesurable sur E_2, $\forall x \in E_1$

② $x \longmapsto f(x,y)$ est continue sur E_1, $\forall y \in E_2$

③ $\exists$ une fct g μ_2-intégrable telque $g : E_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $|f(x,y)| \leq g(y)$

Alors F est continue sur E_1

Théorème :

$f : E_1 \times E_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ et $F(x) = \int_{E_2} f(x,y)\, d\mu_2(y)$

si on a : ① $y \longmapsto f(x,y)$ est mesurable sur E_1

② $x \longmapsto f(x,y)$ est continue sur E_2

③ $\exists$ une fct g t.q $\forall x \in K$ compact de $\mathbb{C}$ vérifiant $|f(x,y)| < g(y)$

$\Rightarrow$ F est continue sur E_1

Théorème de dérivabilité sous signe intégrale

soit $(E_1, \mathcal{E}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{E}_2, \mu_2)$ deux espaces mesuré et $f : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$

et soit $F(x) = \int_{E_2} f(x,y)\, d\mu_2(y)$

si on a ① $y \longmapsto f(x,y)$ est intégrable, $\forall x \in E_1$

② $x \longmapsto f(x,y)$ est dérivable, $\forall y \in E_2$

③ $\exists\, h$ μ_1-intégrable t.q $\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right| \leq h(y)$

$\Rightarrow$ F est dérivable sur E_1 et on a $F'(x) = \int_{E_2} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\, d\mu_1(y)$

Exercice :

soit la fct Eulerienne de seconde espece ; $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$

① Mq Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ (chercher le domaine de définition de Γ)

② Mq Γ est continue sur son domaine de définition

③ Mq Γ est dérivable puis que Γ est $C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$

correction :

soit $f(x,t) = t^{x-1} e^{-t}$; $t \longmapsto f(x,t)$: continue $\Rightarrow$ mesurable

Au $V(0)$ ($t \sim 0$) on a $t^{x-1} e^{-t} \overset{V(0)}{\sim} t^{x-1} = t^\alpha$ d'après Riemann t^α est intégrable au $V(0) \Leftrightarrow \alpha > -1$ d'où t^{x-1} est intég au $V(0) \Leftrightarrow x - 1 > -1$

$\Leftrightarrow x > 0$

$\frac{1}{t^{-x+1}}$ $-x+1 < 1 \Leftrightarrow x > 0$

* Au $V(+\infty)$ $\quad t^2 t^{x-1} e^{-t} = t^{x+1} e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \Rightarrow t^{x-1} e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$: intég au $V(+\infty)$ d'après théorème d'où $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

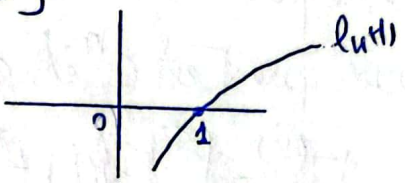
D'où $D_\Gamma = \mathbb{R}_+^*$

2) Continuité de Γ

on vient de vérifier que : $\cdot\ t \longmapsto t^{x-1} e^{-t}$ est mesurable et intégrable

$\cdot\ x \longmapsto t^{x-1} e^{-t} = e^{(x-1)\ln t} e^{-t}$: continue

soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$; $x \in [a,b]$



soit $g(x) = t^x$; $g'(x) = \ln(t)\, t^x$

1ère cas : si $t \in]0,1]$; $g' < 0$; $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \longrightarrow g \downarrow$; $\forall a \leqslant x \leqslant b$:

$g(b) \leqslant g(x) \leqslant g(a)$

$\Rightarrow t^x \leqslant t^a \Rightarrow t^x t^{-1} e^{-t} \leqslant t^{a-1} e^{-t}$

2ème cas : si $t \in [1,+\infty[$; $g' > 0 \Rightarrow g$ est $\uparrow$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$\Rightarrow g(x) < g(b)$; $a \leqslant x \leqslant b \quad t^x \leqslant t^b \Rightarrow t^{x-1} e^{-t} \leqslant t^{b-1} e^{-t}$ $\forall t \in [1,+\infty[$

D'où $\forall x \in [a,b]$; $h(x) = t^{x-1} e^{-t} \leqslant k(t) = \begin{cases} t^{a-1} e^{-t} \text{ si } 0 < t \leqslant 1 \\ t^{b-1} e^{-t} ;\ t > 1 \end{cases}$

Comme précédemment on a vérifié que k est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, $\forall x \in [a,b]$.

D'où Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

3) $\cdot\ \forall t \in \mathbb{R}_+$; $x \longmapsto h(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

et on a $h'(x) = \ln(t)\, t^{x-1} e^{-t} \leqslant |\ln(t)|\, k(t)$

Suite de l'exercice :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

$$|h(x,t)| = |t^{x-1} e^{-t}| \leqslant g(t) = \begin{cases} t^{a-1} e^{-t}, & t \in]0,1] \\ t^{b-1} e^{-t} ; & t \in [1,+\infty[\end{cases}$$

$0 < a \leqslant b$

g est intégrable, mesurable.

* on a $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq |\log t|\, g(t)$.

on montre facilement de la même manière que h est intégrable sur $\mathbb{R}_+$

d'où Γ est dérivable

on vérifie que $x \longmapsto \text{Log}(t)\, t^{x-1} e^{-t}$: continue et que $|\text{Log}(t)\, t^{x-1} e^{-t}| \leq h(t)$ intégrable

$\Rightarrow \Gamma'$ est continue $\Rightarrow \Gamma$ est de classe C^1

on procède par récurrence.

on suppose que Γ est C^n et on montre que Γ est C^{n+1}

on a $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{\infty} \text{Log}^n(t)\, t^{x-1} e^{-t}\, dt$

et on a $h^{(n+1)}(x,t) = \text{Log}^{n+1}(t)\, t^{x-1} e^{-t}$

et on a $|h^{n+1}(x,t)| \leq \text{Log}^{n+1}(t)\, g(t)$: intégrable.

d'où $\Gamma^{(n)}$ est dérivable $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \Gamma$ est C^∞ $\forall n \in \mathbb{N}$

f est C^∞ $\Leftrightarrow$ f est C^n $\forall n \in \mathbb{N}$

Exercice :

· soit $F(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}\, dt$

1) Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$

2) Justifier que F est C^1 et donner F'

3) Retourner l'expression de F.

Réponse :

Th. de continuité sous signe $\int$

$F(x) = \int_E f(x,t)\, d\mu(t)$; $x \in I$

1) $t \longmapsto f(x,t)$ mesurable sur E

2) $x \longmapsto f(x,t)$ continue sur I

3) $\exists g$ μ-intégrable sur E positive t.q. $|f(x,t)| < g(t)$

$\Rightarrow F$ est continue sur I

-1- soit $f(x,t) = \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$

• au $V(+\infty)$: $\frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} \leq e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ intégrable

• au $V(0)$: $\sin(xt) \simeq xt$

alors : $\frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} \underset{0}{\sim} xt$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$

Alors f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ alors F est bien définie sur $\mathbb{R}$

2) $t \longmapsto f(x,t)$ mesurable sur $\mathbb{R}_+$ (car cont)

$x \longmapsto f(x,t)$ dérivable sur $\mathbb{R}$

$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = \cos(xt) e^{-t} \leqslant e^{-t}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (*)

donc $F(x)$ est dérivable

et on a $F'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} dt$ et on a $\cos(xt)e^{-t}$ est cont sur $\mathbb{R}$

et suivant de (*), on aura : $F'(x)$ est continue

$\Rightarrow F(x)$ de C^1

- $F'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} dt$

IPP ou de la primitive de $U \to U'$

ALPES

Arc, log, poly, exp, sin

$u = e^{-t} \longrightarrow u' = -e^{-t}$

$v' = \cos(xt) \longrightarrow v = \frac{1}{x}\sin(xt)$

$F'(x) = \left[\frac{1}{x}\sin(xt) e^{-t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-t} \frac{\sin(xt)}{x} dt$

$\left[\frac{1}{x}\sin(xt) e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 0$

$= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(xt) dt$

$= \frac{1}{x} \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t} e^{ixt} dt\right)$

$= \frac{1}{x} \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{t(ix-1)} dt\right)$ *

$= \frac{1}{x} \operatorname{Im}\left(\frac{1}{ix-1} e^{-t} e^{ixt}\right)$

e^{ixt-t} bornée $t \to +\infty \longrightarrow 0$

$= \frac{1}{x} \operatorname{Im}\left[\left[\frac{1}{ix-1} e^{t(ix-1)}\right]_0^{+\infty}\right]$

$= \frac{1}{x} \operatorname{Im}\left[\frac{-1}{ix-1}\right] = -\frac{1}{x} \operatorname{Im}\left(\frac{+1+ix}{-x^2-1}\right) = \frac{+x}{x(x^2-1)}$

$= \frac{+1}{x^2+1}$

3) $F = \int \frac{1}{(x^2+1)}\,dx = \int \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}$

$= \left[\text{Arctg}(x)\right]_0^{+\infty} = \int \frac{1}{2}\frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\,dx$

$= \frac{\pi}{2}$ $= \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + C$

$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

pour $x = \pi$; $F(\pi) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\pi-1}{\pi+1}\right) + C = 0$

$C = +\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\pi+1}{\pi-1}\right)$

$\Rightarrow F(x) = \int \frac{\pi}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}x + C$

$F(\pi) = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{2}$

$\Downarrow$

$C = -\frac{\pi^2}{2}$